Etude d'une équation fonctionnelle

Thèmes abordés : Continuité et dérivabilité des fonctions numériques.
Les parties I et II sont entièrement indépendantes.
En dehors de la dernière question, la partie III est indépendante de la partie II.

Dans tout le problème : on considère la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

Partie I : Etude de la fonction φ

1.a Etudier la parité de φ.

1.b Etudier les variations de φ sur $\mathbb{R}$ et préciser ses branches infinies en $+\infty$ et $-\infty$.

1.c Donner l'allure de la courbe représentative de φ.

2.a Justifier que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à préciser.

2.b Observer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\varphi'(x) = 1 - \varphi^2(x)$.

2.c Montrer que $\varphi^{-1} : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et exprimer simplement sa dérivée.

Partie II : Etude d'une première équation fonctionnelle

Le but de cette partie est de déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = 2f(x).$$

On considère f une fonction solution.

1. Calculer $f(0)$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On définit une suite réelle (u_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}{\dfrac{x}{2^n}}$.

2.a Montrer que (u_n) converge et exprimer sa limite.

2.b Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

3. Conclure qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \alpha . x$.

Partie III : Etude d'une seconde équation fonctionnelle

Le but de cette partie est de déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en 0 vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = \frac{2f(x)}{1+(f(x))^2}.$$

1. Montrer que φ est solution du problème posé.

2. On considère dans cette question f une solution du problème posé.

2.a Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$.

2.b Montrer que $-f$ est aussi solution

2.c Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq f(x) \leq 1$.

(indice : on pourra exprimer $f(x)$ en fonction de $f\left(\frac{x}{2}\right)$).

3. On suppose dans cette question que f est solution du problème posé et que $f(0) = 1$.

On considère $x \in \mathbb{R}$ et l'on définit la suite (u_n) par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

3.a Montrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

3.b Etablir une relation entre u_n et u_{n+1}.

3.c En déduire que la suite (u_n) garde un signe constant et préciser celui-ci.

3.d Etudier la monotonie de la suite (u_n) et en déduire que celle-ci est constante égale à 1.

3.e Qu'en déduire quant à la fonction f ?

3.f Que peut-on dire si l'hypothèse « $f(0) = 1$ » et remplacée par « $f(0) = -1$ » ?

4. On suppose dans cette question que f est solution du problème posé et que $f(0) = 0$.

4.a En raisonnant par l'absurde et en considérant une suite du même type que ci-dessus, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 1$ et $f(x) \neq -1$.

4.b On introduit la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \varphi^{-1}(f(x))$.
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g(2x) = 2g(x)$ et que g est dérivable en 0.

4.c En déduire une expression de $f(x)$ dépendant d'un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$.

Correction

Mines de Sup 2000

Partie I

1.a $\forall x \in \mathrm{R}, -x \in \mathrm{R}$ et $\varphi(-x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-2x} - 1}{\mathrm{e}^{-2x} + 1} = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{2x}}{1 + \mathrm{e}^{2x}} = -\varphi(x)$, φ est impaire.

1.b φ est $\mathcal{C}^\infty$ et $\varphi'(x) = \left(1 - \dfrac{2}{\mathrm{e}^{2x} + 1}\right)' = \dfrac{4\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^{2x} + 1)^2} > 0$.

φ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

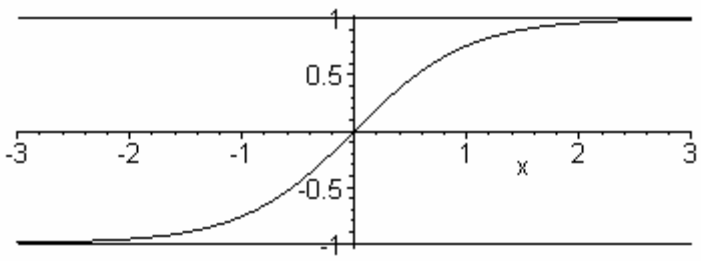
Quand $x \to +\infty$, $\varphi(x) \sim \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}} \to 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 1$.

La droite d'équation $y = 1$ est asymptote φ en $+\infty$.

Puisque $1 - \varphi(x) = \dfrac{2}{\mathrm{e}^{2x} + 1} > 0$, Γ_φ est en dessous de cette asymptote.

Par imparité, la droite d'équation $y = -1$ est asymptote à φ en $+\infty$ avec Γ_φ au dessus de cette asymptote.

1.c



2.a φ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $I=\left]\lim_{-\infty}\varphi,\lim_{+\infty}\varphi\right[=]-1,1[$.

2.b $\varphi'(x)=\dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$ et $1-\varphi^2(x)=1-\dfrac{e^{4x}-2e^{2x}+1}{e^{4x}+2e^{2x}+1}=\dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$.

2.c Puisque φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R},\varphi'(x)\neq 0$ on peut affirmer que φ^{-1} est dérivable et de plus : $(\varphi^{-1})'(x)=\dfrac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}=\dfrac{1}{1-(\varphi(\varphi^{-1}(x)))^2}=\dfrac{1}{1-x^2}$.

Partie II

1. L'équation fonctionnelle pour $x=0$ donne $f(0)=2f(0)$ d'où $f(0)=0$.

2.a $u_n=\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$ avec $h=\dfrac{x}{2^n}$.
Quand $n\to+\infty$, on a $h\to 0$ et par composition $u_n\to f'(0)$.

2.b De part l'équation fonctionnelle : $f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)=2f\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)$. Donc $u_n=u_{n+1}$.

3. De part l'étude précédente : $u_0=f'(0)$ et donc $\forall x\in\mathbb{R}^*, f(x)=\alpha.x$ avec $\alpha=f'(0)$. De plus cette relation est encore vraie pour $x=0$.

Partie III

1. φ est dérivable en 0.
$\forall x\in\mathbb{R},\dfrac{2\varphi(x)}{1+\varphi^2(x)}=\dfrac{2(e^{2x}-1)(e^{2x}+1)}{(e^{2x}+1)^2+(e^{2x}-1)^2}=\dfrac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}=\varphi(2x)$.

2.a L'équation fonctionnelle pour $x=0$ donne $f(0)=\dfrac{2f(0)}{1+f^2(0)}$ d'où
$f(0)(f^2(0)-1)=0$. Par suite $f(0)=0,1$ ou -1.

2.b $-f$ est dérivable en 0 puisque f l'est.
$\forall x\in\mathbb{R},-f(2x)=-\dfrac{2f(x)}{1+(f(x))^2}=\dfrac{2(-f(x))}{1+(-f(x))^2}$.

2.c $f(x)=\dfrac{2a}{1+a^2}$ avec $a=f(x/2)$. Or $(a-1)^2\geq 0$ et $(a+1)^2\geq 0$ donnent : $-(1+a^2)\leq 2a\leq(1+a^2)$ et par suite $-1\leq f(x)\leq 1$.

3.a Quand $n\to+\infty$, on a $\dfrac{x}{2^n}\to 0$ et puisque f est continue en 0 (car dérivable en 0) on a
$u_n=f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)\to f(0)=1$.

3.b $u_n=f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)=\dfrac{2f\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)}{1+\left(f\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)\right)^2}=\dfrac{2u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2}$.

3.c Par la relation ci-dessus :
$(u_n\geq 0\Rightarrow u_{n+1}\geq 0)$ et $(u_n\leq 0\Rightarrow u_{n+1}\leq 0)$.
Par suite (u_n) est de signe constant et puisque $u_n\to 1$ on peut affirmer que la suite (u_n) est positive.

3.d $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_{n+1}(u_{n+1}^2-1)}{1+u_{n+1}^2}\le 0$ car $u_{n+1}=f\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)\in[-1,1]$.

Par suite (u_n) est décroissante.

(u_n) décroît vers 1, donc $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\ge 1$.

Or $u_n=f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)\in[-1,1]$ donc $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=1$.

3.e Puisque $u_0=1$, on obtient $f(x)=1$ et ceci pour tout $x\in\mathbb{R}^*$. Comme ceci est de plus vrai pour $x=0$, f s'avère être constante égale à 1.

3.f Dans le cas où $f(0)=-1$, on applique l'étude ci-dessus à $-f$ pour conclure que f est constante égale à -1.

4.a Supposons $\exists x\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)=1$.

Considérons (u_n) de terme général : $u_n=f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.

Comme ci-dessus $u_n=\dfrac{2u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2}$.

Par récurrence on montre alors $u_n=1$.

Or $u_n\to f(0)=0$, c'est absurde.

Par suite $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)\ne 1$.

De même : $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)\ne -1$.

4.b $\varphi(g(2x))=f(2x)=\dfrac{2f(x)}{1+(f(x))^2}$ et $\varphi(2g(x))=\dfrac{2\varphi(g(x))}{1+(\varphi(g(x)))^2}=\dfrac{2f(x)}{1+(f(x))^2}$.

L'application φ étant injective : $g(2x)=2g(x)$.

De plus, par composition, γ est dérivable en 0.

4.c De part la partie II :

$\exists\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}, g(x)=\alpha.x$ et donc $f(x)=\varphi(\alpha.x)=\dfrac{e^{2\alpha x}-1}{e^{2\alpha x}+1}$.